Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Würzburg
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 10.10.2012

Übungsblatt 01: Existenz und Eindeutigkeit
Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: 18.10.2012, in der Vorlesung

1. **Satz**. Die Ruhelage $x \equiv 0$ der Gleichung $\dot{x} = x^2$ ist global attraktiv.

   Beweis. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{x} = x^2$ ist durch $x(t) = -\frac{1}{t+c}$ gegeben.

   Es folgt, dass $\forall c \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} -\frac{1}{t+c} = 0$. Also konvergieren alle Lösungen gegen 0, und $x \equiv 0$ ist global attraktiv. ■

   Aber komischerweise ist $\dot{x} > 0$ für alle $x > 0$. Was stimmt hier nicht?

   (2 Punkte)

2. Untersuchen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Aufgabe

$$\dot{y} = f(y), \quad y(0) = x, \quad f(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y < 0 \\ -1, & \text{if } y \geq 0 \end{cases}$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$. Falls die Lösung existiert, ist es für alle t definiert?
   Betrachten Sie dieselbe Aufgabe für den Fall, dass $y(0) = 0$ ein Endwert ist und wir die Lösung auf $(-\infty, 0)$ finden wollen.

   (4 Punkte)

3. **Fischerei Modell**
   Betrachten Sie die durch

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha x(t)\,(K - x(t)) - u(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) &= x^0 > 0 \end{aligned} \tag{FM}$$

   gegebene Dynamik einer Fischpopulation in einem Teich. Dabei beschreibt $u(t)$ die Fangstrategie, $K > 0$ das Sättigungsniveau der Population und $\alpha > 0$ sei eine Konstante. Für alle $t \geq 0$ sei $x(t) \geq 0$ und $u(t) \geq 0$.

   (a) Finden Sie mittels Trennung der Variablen für $u(t) = 0$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ eine explizite Lösung von (FM). Zeigen Sie, dass für alle Anfangswerte $x^0 > 0$ die Lösungen gegen die Ruhelage $x^* = K$ konvergieren.

   (b) Zeigen Sie, dass eine konstante Fangrate $u(t) \equiv \bar{u} > \frac{\alpha K^2}{4}$ für alle Anfangswerte ein Aussterben der Population in endlicher Zeit zur Folge hat.

   (c) Sei nun $u(t) \equiv \bar{u} < \frac{\alpha K^2}{4}$. Zeigen Sie es existieren zwei Ruhelagen x^*, x^{**} mit $0 < x^* < x^{**}$. Zeigen Sie weiterhin, dass

      (i) für $x^0 > x^*$ die Lösung von (FM) eindeutig auf $[0, \infty)$ ist und für $t \to \infty$ gegen die Ruhelage x^{**} konvergiert;

      (ii) für $x^0 < x^*$ die Population in endlicher Zeit ausstirbt.

   (4 Punkte)