Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Würzburg
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 18.10.2012

Übungsblatt 02: Laplace-Transformation und Stabilität
Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: Donnerstag, 25.10.2012, in der Vorlesung

1. (a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 37\cos 3t + 9e^{-t}$$

mit den Anfangswerten $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

(b) Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \dot{y}(t) + 3x(t) &= 1 \\ \ddot{y}(t) - 4\dot{x}(t) + 3y(t) &= 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Berechnen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösungen zu diesen Anfangswertproblemen.

(3 Punkte)

2. Betrachten Sie das folgende System

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases} \tag{1}$$

- Linearisieren Sie (1) um $(0,0)$. Ist die Ruhelage des linearisierten Systems stabil (asymptotisch stabil)? Was sagt das über Stabilität von (1)?
- Finden Sie eine Lyapunov Funktion für (1) und beweisen Sie damit dass (1) global asymptotisch stabil ist.

(3 Punkte)

3. Konstruieren wir die Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ wie folgt: sei $f(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Außerdem definieren wir $f(x) = \frac{1}{4}$ für $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ und $f(x) = \frac{3}{4}$ für $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ usw.

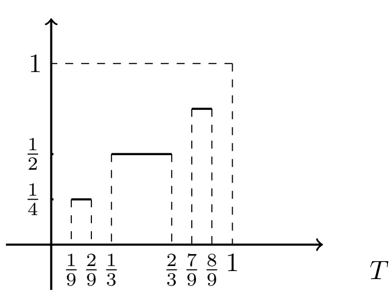

Abbildung 1: Erste 2 Iterationen

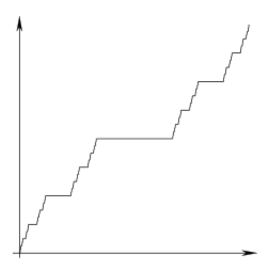

Abbildung 2: Grafik der Funktion f

Diese Funktion ist fast überall definiert. Beweisen Sie, dass:

(a) Man kann die Funktion f in weiteren Punkten des Intervalls $[0,1]$ so definieren, dass f stetig (auch gleichmäßig stetig!) ist.

(b) Die Funktion f ist nicht absolut stetig.

(3 Punkte)

4. Gegeben sei das **nichtlineare Pendel**

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\sin x_1(t) + u(t)$$

mit Anfangswert $x(t_0) = x^0$ und $I = \mathbb{R}$. Es sei $t_{\max} := \sup \{t \in I : \text{ es existiert eine Lösung auf } [t_0, t]\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige $u \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ und t_0, x^0 gilt, dass $t_{\max} = \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass dies ebenfalls für das rückgeführte System mit der Rückkopplung $u(t) = -2x_1(t) - x_2(t)$ gilt.

(c) Finden Sie eine Rückkopplung und einen Anfangswert, für die das rückgeführte System ein endliches $t_{\max}$ besitzt.

(4 Punkte)