Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Würzburg
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 25.10.2012

Übungsblatt 03: Erreichbarkeit und Kontrollierbarkeit

Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: Freitag, 02.11.2012, 9.30-11.30 (Büro 01.019, Mathematik Ost)
oder per Email: andrii.mironchenko@mathematik.uni-wuerzburg.de

1. Aufgabe 3b als auch die dritte Gleichung in der zweiten Aufgabe wurden geändert.
2. Für standarte algebraische Berechnungen (Berechnung der Kalman-Matrix und der Kontrollierbarkeitsgramschen, Multiplikation der Matrizen) kann man mathematische Software verwenden.
3. Neue Abgabetermin!

1. **Zeitdiskretes Kontrollsystem**
   Gegeben sei ein lineares zeitdiskretes Kontrollsystem

   $$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

   mit $(A, B) \in \mathrm{L}_{n,m} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathcal{R}(0) = \mathbb{R}^n$, wenn die Kalman-Rangbedingung erfüllt ist. Hier ist $\mathcal{R}(0) = \cup_{t\in\mathbb{N}}\mathcal{R}_t(0)$. Die Erreichbarkeitsmengen $\mathcal{R}_t(0)$, $t \in \mathbb{N}$ sind analog zum kontinuierlichen Fall definiert.

   Im kontinuierlichen Fall hatten wir $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_s(0)$ für jedes $s > 0$. Gilt es $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_s(0)$ für jedes $s \in \mathbb{N}$ auch im zeitdiskreten Fall?

   (4 Punkte)

2. **Kontrolle eines Wagens mit zwei Pendeln.**
   Wir betrachten einen Wagen mit Masse M und zwei invertierten Pendeln mit Länge l_1, l_2 und Massen m_1, m_2, wie in Abbildung 1.

   Wenn die Reibung vernachlässigt wird und die Massen sich am Ende der Pendel konzentrieren, wird die Bewegung des Systems für kleine θ_1, θ_2 und $r = 0$ durch die folgenden linearisierten Gleichungen beschrieben:

   $$\begin{array}{rcrcrcl} (M+m_1+m_2)\ddot{r} & + & m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 & + & m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 & = & u \\ & & m_1 l_1 \ddot{r} & + & m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 & = & m_1 g l_1 \theta_1 \\ & & m_2 l_2 \ddot{r} & + & m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 & = & m_2 g l_2 \theta_2 \end{array}$$

   (a) Benutzen Sie Ihre physikalische Intuition, um Bedingungen an die Parameter anzugeben, so dass das System zu der aufrechten Stellung $(r, \theta_1, \theta_2, \dot{r}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = 0$ kontrollierbar ist.

   (b) Beschreiben Sie das System als System erster Ordnung und prüfen Sie die Antwort zu (a).

   (4 Punkte)

3. Gegeben sei das reibungsfreie **nichtlineare Pendel**

   $$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
   $$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin x_1(t) + u(t),$$

   wobei g die Erdbeschleunigung und l die Länge des Pendels bezeichnen.

   (a) Berechnen Sie für die Linearisierung in $(0, 0)$ die Kontrollierbarkeitsgramsche.

   (b) Wie groß ist Energie, die man benötigt um das linearisierte System von dem Zustand $x = (\pi, 0)$ nach $z = (0, 0)$ zu steuern, wenn die Länge des Pendels gegen Null konvergiert?

   (4 Punkte)

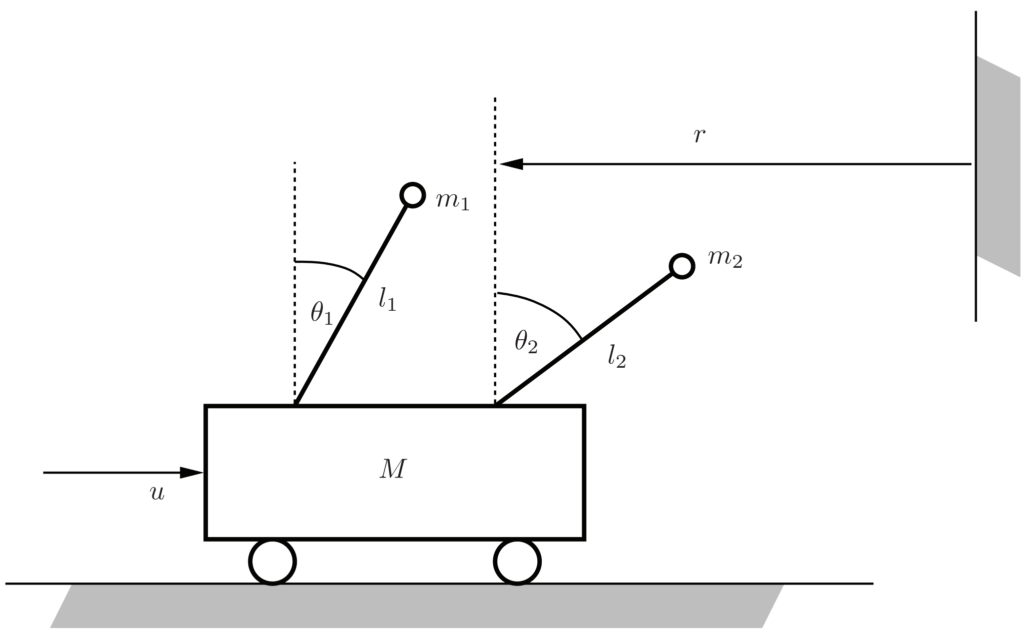

Abbildung 1: Kontrolle eines Wagens mit zwei Pendeln.