Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Würzburg
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 08.11.2012

Dynamics & Control

Übungsblatt 05: Kontrollierbarkeit und Abstand von ihr
Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: Donnerstag, 15.11.2012, in der Vorlesung

1. Ein dynamisches System (in Polarkoordinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) sei gegeben durch

$$\dot{r} = r(1-r), \tag{1}$$
$$\dot{\theta} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{2}$$

Finden Sie alle Fixpunkte (x, y) dieses Systems (in kartesischen Koordinaten). Untersuchen Sie Stabilität und Attraktivität der Fixpunkte.

(4 Punkte)

2. Das minimale Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist nach Definition das normierte Polynom p von minimalen Grad für das $p(A)x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Gegeben sei $(A, B) \in L_{n,m}$ und es bezeichne χ_A das charakteristische Polynom von A. Bezeichne für ein festes $x \in \mathbb{R}^n$ durch $\chi_{A,x}(\lambda)$ das normierte Polynom von minimalen Grad für das $\chi_{A,x}(A)x = 0$ gilt.

Wir nehmen an, dass χ_A gleich dem minimalen Polynom der Matrix A ist.

(a) Zeigen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$, dass $\chi_{A,x}$ ein Teiler von χ_A ist.

(b) Zeigen Sie, dass (A, B) kontrollierbar ist genau dann wenn $\exists b \in \mathrm{im} B$, so dass $\chi_{A,b} = \chi_A$ gilt.

(4 Punkte)

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Zeigen Sie, dass (A, b) kontrollierbar ist dann und nur dann wenn $b \notin K$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \mathbb{R}^n$: $AK \subset K$.

(2 Punkte)

4. Wir betrachten das parametrisierte System gegeben durch

$$(A_\alpha, B) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Zeigen Sie, dass die Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(A_\alpha, B)$ unabhängig von α ist und konstruieren Sie eine Störung von B um zu zeigen, dass der Abstand zur Unkontrollierbarkeit kleinergleich $1/\sqrt{\alpha}$ ist.

(4 Punkte)