Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Würzburg
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

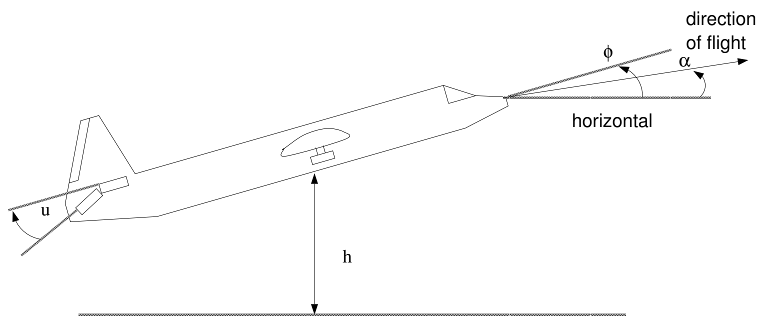
Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 15.11.2012

Übungsblatt 06: Stabilisierung
Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: Donnerstag, 22.11.2012, in der Vorlesung

1. Das folgende System beschreibt ein Flugzeug, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit c in der Höhe h bewegt, vgl. nachstehende Abbildung. Die Konstanten a, b und w sind positiv.



Dabei gelten die folgenden linearisierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= a(\phi - \alpha) \\ \ddot{\phi} &= -w^2(\phi - \alpha - bu) \\ \dot{h} &= c\,\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Bezeichne $x_1 = \alpha$, $x_2 = \phi$, $x_3 = \dot{\phi}$, $x_4 = h$. Modellieren Sie (1) als ein lineares System $(A, B) \in L_{4\times 1}$ und zeigen Sie, dass dieses kontrollierbar ist.

(b) Seien alle Konstanten gleich eins. Definieren wir $(\tilde{A}, \tilde{b})$ wie folgt:

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \text{ und } \tilde{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei α_i die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind (siehe Vorlesung).
Finden Sie $(\tilde{A}, \tilde{b})$ und $T \in Gl_n(\mathbb{R})$ für (1), so dass (1) ähnlich zu $(\tilde{A}, \tilde{b})$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $T = \mathcal{R}(A, b)\,\mathcal{R}(\tilde{A}, \tilde{b})^{-1}$.

(c) Finden Sie eine Rückkopplung $u = fx$, so dass alle Eigenwerte von $A + bf$ den Wert -1 haben.

(6 Punkte)

2. Gegeben sei das zwei-dimensionale System

$$\Sigma: \qquad \dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (\beta \neq 0).$$

Weiter sei $\tau > 0$ eine gegebene Abtastrate und

$$\Sigma^{(\tau)}: \qquad x^\tau(k+1) = A_\tau x^\tau(k) + B_\tau u^\tau(k)$$

das mit τ abgetastete System.

(a) Bestimmen Sie A_τ und B_τ.

(b) Für welche $\beta \neq 0$ ist das mit τ abgetastete System kontrollierbar?

(4 Punkte)

3. Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{z} + ml\ddot{y}\cos y - ml\dot{y}^2 \sin y + F\dot{z} &= u \\ l\ddot{y} - g\sin y + \ddot{z}\cos y &= 0. \end{aligned}$$

Das System entspricht einem invertierten Pendel auf einem Wagen, welcher mit der Kraft u angetrieben wird. Hierbei seien $l > 0$ die Länge des Pendels, $M > 0$ die Masse des Wagens, $m > 0$ die Masse des Pendels, z die Auslenkung des Wagens, y der Winkel zwischen Pendel und Vertikalen und $F \geq 0$ ein Reibungskoeffizient.

(a) Linearisieren Sie das System entlang $y = 0$ und schreiben Sie es in der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ mit $x = (z, \dot{z}, y, \dot{y})$ und zeigen Sie, dass das linearisierte System kontrollierbar ist.

(b) Setzen Sie $M = m = F = g = l = 1$ und finden Sie eine Rückkopplung $u = Kx$, so dass das rückgekoppelte System die Eigenwerte

$$(i) \quad (-1, -2, -3, -4) \qquad\qquad (ii) \quad (-1, -1, -10, -10)$$

besitzt.
Benutzen Sie hierzu `Matlab` oder `Scilab` (kostenlos): Machen Sie sich hierbei mit dem Befehl *place* (bzw. *ppol* bei `Scilab`) vertraut.

(4 Punkte)