LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK II
UNIVERSITÄT WÜRZBURG
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 18.12.2012

Übungsblatt 11: Eingangs-Zustands Stabilität
Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: am Donnerstag, 10.01.2013, in der Vorlesung

Betrachtet werde ein kontinuierliches zeitinvariantes System

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{Σ}$$

mit Zustandsraum $X = \mathbb{R}^n$ und zulässigen Kontrollen $U_c = L_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$. Die Norm in $L_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ bezeichnen wir durch $\|\cdot\|_\infty$. Es wird vorausgesetzt, dass für jedes u und x_0 die Lösung $\varphi(t, x_0, u)$ von (Σ) für alle $t \in [0, \infty)$ existiert und eindeutig ist.
Weiter werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &:= \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \mid f(0) = 0,\ f \text{ stetig und strikt monoton steigend } \} \\
\mathcal{K}_\infty &:= \{ f \in \mathcal{K} \mid f \text{ unbeschränkt } \} \\
\mathcal{L} &:= \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \mid f \text{ ist stetig und monoton fallend mit } \lim_{t\to\infty} f(t) = 0 \} \\
\mathcal{KL} &:= \{ g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \mid g \text{ ist stetig, } g(t, \cdot) \in \mathcal{L},\ g(\cdot, s) \in \mathcal{K},\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}_+ \}.
\end{aligned}$$

Definition 0.1 *Ein System (Σ) heißt Eingangs-Zustands stabil (input-to-state stable (ISS)), falls es Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ gibt, so dass für jedes $t > 0$, für jeden Eingang $u \in U$ und jeden Anfangswert $x_0 \in X$ gilt, dass*

$$|\varphi(t, x_0, u)| \leq \max\{\beta(|x_0|, t),\ \gamma(\|u\|_\infty)\}.$$

Definition 0.2 *Ein System (Σ) heißt global asymptotisch stabil um $u \equiv 0$ (0-GAS), falls es $\beta \in \mathcal{KL}$ gibt, so dass für jedes $t > 0$ und jeden Anfangswert $x_0 \in X$ gilt, dass*

$$|\varphi(t, x_0, 0)| \leq \beta(|x_0|, t).$$

1. Beweisen Sie, dass die obere Definition von 0-GAS mit der üblichen Definition von GAS konsistent ist, d.h. (Σ) ist 0-GAS genau dann, wenn das System $\dot{x} = f(x, 0)$ die folgenden Eigenschaften besitzt:
   - (Globale Attraktivität): Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ folgt es $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0, 0) = 0$.
   - (Lokale Stabilität): Für alle $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$: für alle $x_0 : |x_0| < \delta$ folgt es $|\varphi(t, x_0, 0)| < \epsilon$ für alle $t \geq 0$.

   (4 Punkte)

   Bemerkung 0.3 *Insbesondere gilt: ISS impliziert 0-GAS.*

2. Sei (Σ) ISS. Zeigen Sie, dass falls $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, so folgt für jedes festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dass $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0, u) = 0$.

   (4 Punkte)

3. Gegeben sei ein lineares System
$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{1}$$
   Beweisen Sie: (1) ist intern stabil (d.h. A ist Hurwitz) $\Leftrightarrow$ (1) ist 0-GAS $\Leftrightarrow$ (1) ist ISS.

   (3 Punkte)

4. Zeigen Sie mithilfe eines Gegenbeispiels, dass für ein nichtlineares System (Σ) 0-GAS und ISS nicht äquivalent sind.

   (2 Punkte)