Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Würzburg
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 17.01.2013

Übungsblatt 13: Stabilisierende Regler und Stabilitätsradius
Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: Donnerstag, 24.01.2013, in der Vorlesung

1. Betrachten Sie das System
$$\dot{x} = (A + \Delta)x, \tag{1}$$
mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ und einer Störung $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zudem sei
$$P = \int_0^\infty e^{A^*t}e^{At}dt$$
die Lösung der Lyapunov Gleichung
$$PA + A^*P = -I.$$
Finden Sie eine Abschätzung der Ableitung der Lyapunov Funktion $V(x) = \langle x, Px\rangle$ entlang der Trajektorie des gestörten Systems.
Zeigen Sie mithilfe dieser Abschätzung die folgende Ungleichung
$$\|P\| \geq \frac{1}{2r_{\mathbb{C}}(A, I, I)},$$
wobei $r_{\mathbb{C}}(A, I, I)$ der Stabilitätsradius des Systems (1) ist. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie den linearen Oszillator
$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + (1 + \Delta)y(t) = 0, \qquad t \geq 0$$
mit einem festen $\alpha > 0$ und einer unbekannten Störung Δ der Rückstellkraft.
   (a) Finden Sie Matrizen A, D und E, so dass das System in der folgenden Form geschrieben werden kann
   $$\dot{x}(t) = (A(\alpha) + D\Delta E)x(t).$$
   (b) Berechnen Sie den reellen und den komplexen Stabilitätsradius. Wie ist die Abhängigkeit von α?

   (4 Punkte)

3. **Nyquist Kriterium**
   - Lesen Sie den Abschnitt 'Nyquist Criterion' (Seite 341) aus dem Buch E. Sontag. Mathematical Control Theory.
   - Lösen Sie die Aufgabe 7.5.7. aus diesem Buch.
   - Betrachten Sie die Transferfunktion
   $$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}.$$
     (a) Erstellen Sie mit Hilfe von Scilab (Matlab) das Nyquist-Diagram (Quellkode soll angegeben werden).
     (b) Bestimmen Sie anhand des Nyquist-Kriteriums die Parameter k, für die das rückgekoppelte System stabil ist.

   (4 Punkte)