Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Würzburg
http://www2.mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko

Würzburg, den 24.01.2013

Übungsblatt 14: Lineare Quadratische Optimalsteuerung
Regelungstheorie, WS 12/13

Abgabe: Donnerstag, 31.01.2013, in der Vorlesung

1. **(Optimales Servo Problem)** Es sei r der Ausgang zum System
$$\dot{z}(t) = A_0 z(t), \quad r(t) = C_0 z(t)$$
und ein System der Form
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$
gegeben. Das Ziel ist es u so zu bestimmen, dass der Ausgang $y(t)$ auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ der Trajektorie $r(t)$ folgt. Mathematisch wollen wir also zu gegebenen x_0 und $r(\cdot)$ die Kostenfunktion
$$J(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (y(t) - r(t))^\top Q(y(t) - r(t)) + u(t)^\top Ru(t)\; dt + (y(t_1) - r(t_1))^\top S(y(t_1) - r(t_1))$$
minimieren, wobei (x, u) die zugehörige Trajektorie mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist.
Zeigen Sie, wie man unter passenden Annahmen an R, Q, S eine Lösung für dieses Problem bestimmen kann und zeigen Sie, dass diese Lösung eindeutig ist.
Hinweis: Führen Sie ein größeres lineares System ein, dessen Zustandsraum gerade aus den Paaren $(x, z)^\top$ besteht. (4 Punkte)

2. Manchmal ist es von Interesse Kosten zu betrachten, die Beziehungen zwischen Eingang und Zustand mittels eines Verbindungsterms mit einbeziehen. Genauer betrachten wir die Kostenfunktion
$$J(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} R & L \\ L^\top & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x(t_1)^\top Sx(t_1)$$
wobei x die Lösung des zugrundeliegenden Systems $\dot{x} = Ax + Bu$ zum Anfangswert (t_0, x_0) und Eingang $u(\cdot)$ beschreibt.
Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass R positiv definit und die Matrix $\begin{bmatrix} R & L \\ L^\top & Q \end{bmatrix}$ positiv semi-definit ist, die Aussage des entsprechenden Satzes der Vorlesung für obige Kostenfunktion, mit leicht veränderter Rückkopplung und Riccati-Gleichung, gültig bleibt. (4 Punkte)

3. Gegeben sei das System
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$
und die Kostenfunktion
$$J(x_0, u(\cdot)) = \int_0^\infty y^2(t) + \rho u^2(t)\; dt = \int_0^\infty y(t)^\top Qy(t) + u(t)^\top Ru(t)\; dt$$
mit $\rho > 0$.
   (a) Bestimmen Sie die optimale Kontrolle $u^*(t) = -R^{-1}B^\top \Pi x(t)$ indem Sie die algebraische Riccati-Gleichung
   $$\Pi BR^{-1}B^\top \Pi - \Pi A - A^\top \Pi - C^\top QC = 0$$
   lösen. (Q, R, sind analog zur Vorlesung aus J zu bestimmen.)
   (b) Wie verhalten sich die Eigenwerte des rückgeführten Systems für unterschiedliche Wahl von $\rho > 0$. Plotten Sie den Realteil der Eigenwerte als Funktion von ρ.
   (c) Plotten Sie $u^*(t)$ und $y(t)$ jeweils für $\rho = 0.1, 1, 10, 100$ und den Anfangswert $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Hinweis: Diese Aufgabe soll in Mathe-Software gemacht werden (Scilab, Matlab, Mathematica usw.). Z.B. können in Scilab die folgenden Funktionen hilfreich sein: `riccati, spec, ode, expm`.

(6 Punkte)