4.1 Blatt 5: Aufgabe 2.

Definition 4.1. *Das Minimalpolynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist nach Definition das normierte Polynom p von minimalen Grad für das $p(A)x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

Definition 4.2. *Das Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ heißt ein Minimalpolynom einer Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich A falls p ein Polynom minimaler Grad ist, so dass $\forall x \in S$ $p(A)x = 0$.*

Gegeben sei $(A, B) \in L_{n,m}$ und es bezeichne χ_A das charakteristische Polynom von A. Bezeichne für ein festes $x \in \mathbb{R}^n$ durch $\chi_{A,x}(\lambda)$ das normierte Polynom von minimalen Grad für das $\chi_{A,x}(A)x = 0$ gilt.
Wir nehmen an, dass χ_A gleich dem minimalen Polynom der Matrix A ist.

1. Zeigen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$, dass $\chi_{A,x}$ ein Teiler von χ_A ist.

2. Zeigen Sie, dass (A, B) kontrollierbar ist genau dann wenn $\exists b \in ImB$, so dass $\chi_{A,b} = \chi_A$ gilt.

Die Lösung:

Lemma 4.3. *Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\chi_{A,x}$ ein Teiler von χ_A.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $\chi_{A,x}$ kein Teiler von χ_A ist. Dann

$$\chi_A(\lambda) = f(\lambda)\chi_{A,x}(\lambda) + r(\lambda),$$

und $deg(r) < deg(\chi_{A,x})$. Setzen wir (formell) $\lambda := A$. Dann haben wir

$$r(A)x = \chi_A(A)x - f(A)\chi_{A,x}(A)x = 0,$$

ein Widerspruch zur Minimalität von $\chi_{A,x}$. □

Lemma 4.4. *Wenn p ein Minimalpolynom von ImB (bezüglich A) ist, dann p ist auch ein Minimalpolynom von $Im\mathcal{R}[A, B] = Im[B|AB| \dots |A^{n-1}B]$.*

Beweis. Sei p ein Minimalpolynom von ImB bezüglich A. Für alle $y \in Im\mathcal{R}[A, B]$ gilt $y = \sum_0^{n-1} A^i Bx_i$ für gewisse $x_i \in \mathbb{R}^n$. Wegen $p(A)Bx_i = 0$ für alle x_i gilt es

$$p(A)y = p(A) \sum_0^{n-1} A^i Bx_i = \sum_0^{n-1} A^i p(A)Bx_i = 0.$$

Also, $p(A)$ annuliert $Im\mathcal{R}[A, B]$. Klar, p ist auch ein Minimalpolynom von $Im\mathcal{R}[A, B]$ bezüglich A, da $Im\mathcal{R}[A, B] \supset ImB$. □

Wir brauchen die nächste Lemma (Sehen Sie W. Murray Wonham Linear multivariable control, exercise 1.8, p. 46 (Dritte Auflage)).

Lemma 4.5. *Sei K und S_i, $i = 1, \dots, N$ beliebige Unterräume in $\mathbb{R}^n$. Sei $K \subset S_1 \cup \dots \cup S_N$ ($\cup$ ist die Vereinigung der Mengen). Dann $K \subset S_i$ für gewisses i.*

Theorem 1. *(A, B) kontrollierbar ist genau dann wenn $\exists b \in ImB$, so dass $\chi_{A,b} = \chi_A$ gilt.*

Beweis. $\Leftarrow$: Sei $\exists b \in ImB$, so dass $\chi_{A,b} = \chi_A$ gilt. Da χ_A ein charakteristisches Polynom ist, wir erhalten

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i = 0, i = 0, \dots, n-1,$$

und dies beweist die lineare Unabhängigkeit von $\{A^i b, i = 0, \dots, n-1\}$. Also,

$$rank[b| \dots |A^{n-1}b] = n,$$

und (A, b) ist kontrollierbar, was impliziert, dass auch (A, B) kontrollierbar ist.
$\Rightarrow$: Sei (A, B) kontrollierbar.
Aus der Kontrollierbarkeit von (A, B) folgt $Im\mathcal{R}[A, B] = \mathbb{R}^n$, und nach Lemma 4.4 erhalten wir, dass $\chi_{A,ImB} = \chi_A$ ist.
Also, es reicht zu beweisen, dass $\exists b \in ImB$, so dass $\chi_{A,b} = \chi_{A,ImB}$ ist, wobei $\chi_{A,ImB}$ ein Minimalpolynom von ImB bezüglich A ist.
Betrachten wir eine Menge $L := \{\chi_{A,c} | c \in ImB\}$. Diese Menge ist endlich, da nach eine Variation von Lemma 4.3 für alle $c \in ImB$ das Polynom $\chi_{A,c}$ teilt $\chi_{A,ImB}$.
Also, $L = \{p_1, \dots, p_N\}$ für gewisses $N < \infty$.
Für alle $x \in ImB$ existiert $p \in L$: $p(A)x = 0$. Also, $ImB \subset \cup_{i=1}^N ker(p_i(A))$.
Nach Lemma 4.5 folgt $ImB \subset ker(p_j(A))$ für gewisses $j \in \{1, \dots, N\}$. D.h. $\forall x \in ImB$ $p_j(A)x = 0$, also p_j annuliert ImB. Dann folgt es (warum?) dass $\chi_{A,ImB} | p_j$. Aber da $p_j = \chi_{A,b}$ für ein gewisses $b \in B$, dann gilt es laut Lemma 4.3, dass $p_j | \chi_{A,ImB}$. Daraus schließen wir $\chi_{A,ImB} = \chi_{A,b}$, und die Behauptung des Satzes folgt. $\square$