1 Aufgabe 9.2

Angenommen für jedes G^{ij} existiert eine Realisierung (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}). Das heißt

$$(G_{k+1})^{ij} = C_{ij} A_{ij}^k B_{ij}.$$

Setze

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{12} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{pm} \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{12} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{1m} \\ B_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{p2} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{pm} \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1m} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_{21} & \dots & C_{2m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{p1} & \dots & C_{pm} \end{pmatrix}$$

Wir haben:

$$CA^kB = \begin{pmatrix} C_{11}A_{11}^k B_{11} & \dots & C_{1m}A_{1m}^k B_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{p1}A_{p1}^k B_{p1} & \dots & C_{pm}A_{pm}^k B_{pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (G_{k+1})_{11} & \dots & (G_{k+1})_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ (G_{k+1})_{p1} & \dots & (G_{k+1})_{pm} \end{pmatrix} = G_{k+1}$$

Also, (A, B, C) ist eine Realisierung von G.