Prof. Dr. Fabian Wirth
Dr. Andrii Mironchenko
Lehrstuhl für Dynamische Systeme

UNIVERSITÄT PASSAU
Fakultät für Informatik und Mathematik

Gewöhnliche DGL: Aufgabensammlung

1 Lösungsmethoden

Gleichungen mit Trennbaren Variablen

1.1. Lösen Sie folgende Gleichungen/Anfangswertprobleme:

- $\dot{x} \cot t + x = 2$; Finden Sie dazu die Lösung, die der Bedingung $x(t) \to -1$ wenn $t \to 0$ entspricht.
- $\dot{x} = \sqrt{4t + 2x - 1}$
- $2t^2 x\dot{x} + x^2 = 2$
- $x\dot{x} + t = 1$

1.2. **Satz**. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ strebt die Lösung der Gleichung $\dot{x} = x^2$ gegen 0 für $t \to \infty$.

Beweis. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{x} = x^2$ ist durch $x(t) = -\frac{1}{t+c}$ gegeben.

Es folgt, dass $\forall c \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} -\frac{1}{t+c} = 0$. Also konvergieren alle Lösungen gegen 0. ■

Aber komischerweise ist $\dot{x} > 0$ für alle $x > 0$. Was stimmt hier nicht?

1.3. (Richtungsfelder und Isoklinen) Wir betrachten die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

mit stetigem $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ offen. Der Graph $\{((t, x), f(t, x)) \,|\, (t, x) \in D\}$ von f heißt **Richtungsfeld**. Seine Elemente $((t, x), f(t, x))$ (die sog. Linienelemente) visualisiert man als kleine Striche durch (t, x) mit der Steigung $f(t, x)$. Die Niveaulinien von f, also die Kurven (in D) der Form $f(t, x) = const$ heißen **Isoklinen** des Richtungsfeldes. Es gilt also:

i) Linienelemente durch Punkte einer Isokline haben alle dieselbe Steigung.

ii) Lösungskurven $x(t)$ der Differentialgleichung laufen derart durch das Richtungsfeld, daß in jedem Punkt $(t, x(t))$ das betreffende Linienelement tangential zur Lösungskurve liegt.

Skizzieren Sie für $t > 0$ (jeweils in dasselbe Diagramm) Richtungsfeld, Isoklinen und Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$\text{(i)} \;\; \dot{x}(t) = \log t \qquad \text{(ii)} \;\; \dot{x}(t) = \exp\frac{x}{t}.$$

1.4. Gegeben seien die beiden skalaren Differentialgleichungen auf $(t, x) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{(i)} \;\; \dot{x} = 2tx + t \qquad \text{(ii)} \;\; \dot{x} = \exp(t + x + 3).$$

a) Skizzieren Sie jeweils die zugehörigen Integralkurven.

b) Berechnen Sie jeweils die Lösungen der Differentialgleichungen.

c) Lösen Sie die Anfangswertprobleme (AWP)

$$\text{(i)}\ \ \dot{x} = 2tx + t,\ \ x(0) = 3 \qquad \text{(ii)}\ \ \dot{x} = \exp(t + x + 3),\ \ x(-3) = 0.$$

1.5. Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = (y_1, ..., y_n)$ und

$$f(y) := (y_2, y_3, ..., y_n, g(y_1, ..., y_n)).$$

Zeigen Sie, dass die beiden Differentialgleichungssysteme

$$(*) \quad x^{(n)} = g(x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}) \quad \text{und} \quad (**) \quad \dot{y} = f(y)$$

äquivalent sind, d.h. dass gilt $(r \geq 1)$:

(i) $x \in C^{r+n-1}(J, \mathbb{R})$ löst $(*)$ $\Longrightarrow$ $y := (x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)})$ löst $(**)$ und $y \in C^r(J, \mathbb{R}^n)$.

(ii) $y \in C^r(J, \mathbb{R}^n)$ löst $(**)$ $\Longrightarrow$ y_1 löst $(*)$ und $y_1 \in C^{r+n-1}(J, \mathbb{R})$.

1.6. Gegeben sei das implizite skalare Anfangswertproblem

$$\frac{x}{1+x^2}\dot{x} = -\sin(t), \quad x(0) = 1$$

a) Bestimmen Sie die Lösung $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ des AWPs und geben Sie explizit das maximale Existenzintervall I an. Beweisen Sie insbesondere, dass es kein offenes Intervall $J \supset I$, $J \neq I$ gibt, auf das sich die Lösung ϕ fortsetzen lässt.

b) Zeigen Sie, dass man die Lösung des AWPs stetig auf die Ränder von I fortsetzen kann.

Bernoulli und Riccati Gleichungen

1.7. **(Variablentransformation)**

(a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, I ein offenes Intervall und $\phi\colon I \times U \to \mathbb{R}^n$ C^1 mit der Eigenschaft, dass jede der Funktionen

$$\phi_t(x) := \phi(t, x), \quad \phi_t\colon U \to \phi_t(U)$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist. Zeigen Sie: $x\colon I \to U$ ist genau dann Lösung der Dgl $\dot{x} = f(t, x)$, wenn $y = \phi(t, x)$ eine Lösung der transformierten Dgl

$$\dot{y} = \frac{\partial \phi}{\partial t}\left(t, \phi_t^{-1}(y)\right) + \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(t, \phi_t^{-1}(y)\right) \cdot f\left(t, \phi_t^{-1}(y)\right)$$

ist.

(b) Transformieren Sie die *Bernoullische Differentialgleichung* auf $U := (0, \infty)$

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha,$$

mit $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$ mittels der Variablentransformation $\phi(x) = x^{1-\alpha}$ auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

(c) Sei $\alpha < 1$. Zeigen Sie, dass die Lösung $x(t)$ des AWP

$$\dot{x} = x + tx^\alpha, \quad x(0) = x_0 > 0,$$

für alle $t \in [0, \infty)$ definiert ist.

1.8. Betrachten Sie die Gleichung

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n, \quad n \neq 0, 1.$$

Machen Sie die Substitution $y = x^{1-n}$. Leiten Sie nun die DGL für die neue Variable y her (sie müssen diese neue DGL nicht lösen).

1.9. Wir haben im ersten Übungszettel die Bernoullische Gleichung

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n, \quad n \neq 0, 1.$$

untersucht und eine Methode entwickelt, mit der man diese Gleichung vereinfachen kann.

Nun sei J ein Intervall und $a, b, c \colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Ist $\mu(t)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2, \tag{1}$$

so kann man die allgemeine Lösung von (1) mittels der Transformation $y(t) = x(t) - \mu(t)$ bestimmen.

Hinweis: leiten Sie die DGL für y her.

Exakte Gleichungen. Integrierungsfaktor

1.10. Überprüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit. Finden Sie für jede exakte Dgl. die implizite Gleichung $F(t, x) =$ const, der ihre Lösungen genügen müssen. Bestimmen Sie außer in (d) und (e) die allgemeinen Lösungen der exakten Differentialgleichungen in expliziter Form. In (d) und (e) ist $a \in \mathbb{R}$ ein gegebener Parameter.

(a) $\dot{x}(t) = -\frac{t}{x(t)}$

(b) $tx(t)^2 + x(t) - t\dot{x}(t) = 0$

(c) $2x(t)^3 + 3tx(t)^2\dot{x}(t) + 2 = 0$

(d) $3t^2 - 2at + ax(t) - 3x(t)^2\dot{x}(t) + at\dot{x}(t) = 0$
(Newton, De Methodis Serierum et Fluxionum. 1670/71)

(e) $2atx(t) + at^2\dot{x}(t) - x(t)^3 - 3tx(t)^2\dot{x}(t) = 0$
(Euler, De integratione aequationum differentialium, St. Petersburg 1760/61)

1.11. (a) Beweisen Sie: Es seien $M, N : R \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf dem Rechteck R mit $N(t, x) \neq 0$ auf R. Ist die Funktion

$$p(t) = p(t, x) = \frac{1}{N(t, x)} \left[\frac{\partial M}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, x) \right], \quad (t, x) \in R$$

stetig und unabhängig von x, so ist

$$\mu(t) = e^{P(t)} \text{ mit } \frac{dP}{dt}(t) = p(t)$$

ein integrierender Faktor für die Dgl. $M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0$.

(b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung $2x^3 + 2 + 3tx^2\dot{x} = 0$ mit $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ und lösen Sie diese.

2 Modellierung

2.1. Das Wachstum einer Population mit begrenztem Nahrungsangebot wird durch das sog. logistische Wachstumsgesetz (Verhulst 1837) beschrieben

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)^2$$

wobei $a, b > 0$ gegebene Parameter sind und i.a. $a \gg b$. Wähle $X = (0, \infty)$ als Zustandsraum.

a) Bestimmen Sie die Lösung $\varphi(t, x^0)$ von $(*)$ mit $\varphi(0, x^0) = x^0$, wobei $x^0 > 0$ gegeben sei. Skizzieren Sie einige Integralkurven.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t, x^0)$ (für beliebige Anfangszustände $x^0 > 0$).

c) Angenommen, eine bestimmte Population (protozoa paramecium candatum in einem Teströhrchen, Experiment des mathematischen Biologen Gause) vermehre sich nach dem logistischen Wachstumsgesetz. Zu Beginn befinden sich 5 Individuen im Röhrchen. Die Wachstumsrate zu Beginn des Prozesses sei 230,9 %. Am Ende des 4. Tages erreiche die Population einen stationären Wert von 375 Individuen. Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b.

2.2. Ein Fallschirmspringer sprang aus der Höhe von 1.5 Kilometer und öffnete den Fallschirm auf der Höhe von 0.5 Kilometer. Wie lange Zeit fiel er bevor er den Fallschirm geöffnet hat? Es ist bekannt, dass die maximale Fallgeschwindigkeit eines Menschen in der Luft normaler Dichte gleich 50 $\frac{Meter}{Sekunde}$ ist. Die Änderung der Luftdichte kann vernachlässigt werden. Der Luftwiderstand sei proportional zum Quadrat der Fallgeschwindigkeit.

Hinweis: Benutzen Sie die Newtonsche Gleichung!

2.3. In einer Tonne gibt es 100 Liter von Salzlösung. Es kommt ständig ein reines Wasser in die Tonne mit einer Rate von 5 $\frac{Liter}{Minute}$, und das wird sofort mit der Lösung in der Tonne gleichmäßig gemischt. Mit derselben Rate fließt ständig die Salzlösung aus der Tonne. Wie viel Salz wird in der Tonne nach 1 Stunde bleiben?

2.4. Eine Säule habe die Gestalt eines Rotationskörpers mit der nach unten gerichteten x-Achse als Rotationsachse. Der Nullpunkt der x-Achse liege am oberen Ende der Säule, das den Radius r_0 habe und eine gleichmäßig verteilte Masse m_0 trage. Das spezifische Gewicht des Säulenmaterials sei konstant $\sigma kg/m^3$. Wie groß muß der Säulenradius $r(x)$ an der Stelle $x > 0$ gewählt werden, damit jeder Säulenquerschnitt pro Quadratmeter dieselbe Belastung trägt? Skizzieren Sie den Querschnitt der Säule.

2.5. Ein zylindrischer Behälter (Radius R) ist bis zur Höhe h_0 mit Wasser gefüllt und entleert sich durch ein kreisförmiges Loch (Radius ρ) am Boden unter dem Einfluss der Schwerkraft (Erdbeschleunigung g). Nach dem Gesetz von Torricelli gilt für die Ausströmgeschwindigkeit $v(t) = -\sqrt{2gh(t)}$, wobei $h(t)$ die Höhe des Wassers zum Zeitpunkt t ist. Mit der Beziehung $R\dot{h} = \rho v$ erhält man das Anfangswertproblem

$$\dot{h} = -\frac{\rho}{R}\sqrt{2gh}, \quad h(0) = h_0.$$

Wie lautet dessen Lösung? Bestimmen Sie insbesondere alle Lösungen zum AWP $h_0 = 0$.

2.6. Die (x, y)–Ebene ohne die y–Achse wird von der Schar von Parabeln

$$y = \alpha x^2, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

überdeckt. Finden Sie zu dieser Schar die *Orthogonaltrajektorien*, das sind Kurven in der (x, y)–Ebene, die in ihrem gesamten Verlauf die Parabeln rechtwinklig schneiden.

2.7. Sei die Masse einer Rakete, die vollständig mit dem Treibstoff gefüllt ist, gleich m_0 und die Masse der Rakete ohne Treibstoff gleich m_l. Wir nehmen an, dass der Treibstoff kontinuierlich in dieselbe Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit c ausgestoßen wird und dass der Einfluss der Gravitationskraft und des Luftwiderstandes vernachlässigt werden können.

- Beweisen Sie, dass die Geschwindigkeit der Rakete $v : t \mapsto v(t)$ die folgende Gleichung erfüllt:
$$\dot{v}(t)m(t) + \dot{m}(t)c = 0,$$
wobei $m(t)$ die Masse der Rakete zum Zeitpunkt t ist.

- Sei die Anfangsgeschwindigkeit der Rakete gleich 0. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die die Rakete nach dem Ausstoß des gesamten Treibstoffs haben wird.

- Die Masse der Rakete ohne Treibstoff besteht aus 2 Teile: $m_l = m_n + m_s$, wobei m_n die Nutzlast (die Masse des Sputniks) ist und m_s die strukturelle Masse der Rakete ist. Sei
$$\lambda := \frac{m_s}{m_0 - m_n}.$$
Betrachten wir einen 'idealen' Fall, wenn $m_n = 0$. Realistische Werte von c und λ sind $c = 3\frac{Km}{Sek}$ und $\lambda = 0.1$. Wie groß wird die Geschwindigkeit einer solchen Rakete nach dem Ausstoß des gesamten Treibstoffs? Vergleichen Sie das mit der ersten kosmischen Geschwindigkeit für die Erde ($\approx 7.9\frac{Km}{Sek}$). Finden Sie heraus, worum es sich bei der ersten kosmischen Geschwindigkeit handelt. Welche Schlussfolgerungen können Sie ziehen?

- Anzahl vom Licht, das von dem Wasserschicht kleiner Dicke absorbiert wird, ist proportional der Lichtstärke und der Dicke des Wasserschichtes. Ein Wasserschicht mit der Dicke 35 Zm absorbiert die Hälfte des Lichtes. Welches Teil vom Licht wird ein Wasserschicht mit der Dicke 2 Meter absorbieren?

Viel Spaß!

3 Existenz, Eindeutigkeit, Fortsetzbarkeit

3.1. Untersuchen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Aufgabe

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x < 0 \\ -1, & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Falls die Lösung existiert, ist sie für alle t definiert?

3.2. Betrachten Sie die Gleichung

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Klar, $x \equiv 0$ ist eine Lösung dieses AWPs auf dem Zeitintervall $(-\infty, \infty)$.

- Gibt es weitere Lösungen dieser Gleichung auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$?
- Und auf dem $(-\infty, 0]$?

3.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\mathrm{Lip}(U, \mathbb{R})$ die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen von U in den $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \in \mathrm{Lip}(U, \mathbb{R}^m)$ und $f \in \mathrm{Lip}(g(U), \mathbb{R}^k)$, so ist $f \circ g$ Lipschitz-stetig.

(b) Sind $f, g \in \mathrm{Lip}(U, \mathbb{R})$, so auch $|f|$ und $\max\{f, g\}$.

(c) Sind $f, g \in \mathrm{Lip}(U, \mathbb{R})$, so auch $f \cdot g$, und falls $g \neq 0$ auf U ist, auch $\frac{f}{g}$.

3.4. Gegeben sei das AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

bei dem $f\colon Z_{a,b} \to \mathbb{R}^N$ stetig ist mit dem Definitionsbereich

$$Z_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad a, b > 0.$$

Sei $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\}$, wobei $M := \max\{\|f(t, x)\| \mid (t, x) \in Z_{a,b}\}$ und sei $(p_k(\cdot))_{k=1}^{\infty}$ die im Beweis des Satzes von Peano konstruierte Folge von Euler-Polygonen auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

(a) Zeigen Sie: Besitzt das AWP auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ genau eine Lösung $\phi(\cdot)$, so gilt

$$\lim_{k \to \infty} p_k(t) = \phi(t) \text{ für alle } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

(b) Konvergiert die Folge $(p_k(\cdot))_{k=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, so impliziert dies noch nicht die eindeutige Lösbarkeit des AWPs.

3.5. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ (t, x) \longmapsto f(t, x)$ sei stetig. Zeigen Sie:

(a) Ist f in G stetig differenzierbar bzgl. x, so ist f Lipschitz-stetig bzgl. x.

(b) Ist $K \subset G$ kompakt und ist f Lipschitz-stetig bzgl. x auf K, so erfüllt f eine Lipschitzbedingung bzgl. x auf K.

3.6. **(Explizites und Implizites Euler-Verfahren)** Die Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{2}$$

ist üblicherweise analytisch nicht lösbar. Deswegen verwendet man die numerischen Methoden um die Lösung solcher Gleichungen zu suchen.

Die einfachsten Methoden beruhen sich auf die folgenden Approximationen der Ableitung:

- $\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ (Explizites Euler-Verfahren). Dann führt (2) zu
$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = f(t, x(t)).$$
Mit diesem Formel kann man $x(kh)$ für alle $k > 1$ berechnen.

- $\dot{x}(t) \approx \frac{x(t)-x(t-h)}{h}$ (Implizites Euler-Verfahren). In diesem Fall führt (2) zu
$$\frac{x(t)-x(t-h)}{h} = f(t, x(t)).$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -ax(t), \quad x(0) = x_0 \neq 0, \quad a > 0$$

mithilfe der beiden Methoden.

Die analytische Lösung dieser Gleichung konvergiert gegen 0 für alle x_0. Ist auch für beide Eulerschen Verfahren $\lim_{k\to\infty} x(kh) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und alle $h > 0$?

3.7. Gegeben sei das AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und linear beschränkt ist, d.h. es existieren $a, b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ so dass $||f(t, x)|| \leq a(t)||x|| + b(t)$. Benutzen Sie das Gronwall-Lemma um zu zeigen, dass sich jede Lösung $x(t)$ des AWP auf $[t_0, \infty)$ fortsetzen lässt.

3.8. Gegeben sei das lineare AWP

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig und beschränkt auf $[0, \infty)$ sind. Zeigen Sie, dass die Lösungen des AWP sind für alle $t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmt und lassen sich auf $[t_0, \infty)$ fortsetzen.

3.9. Zeigen Sie, dass das AWP

$$\ddot{x} = |\dot{x}| + x, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ hat.

3.10. Gegeben sei das AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

mit stetigem $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$. Ferner sei f Lipschitz-stetig bzgl. x. Zeigen Sie an Hand von Beispielen, dass für die maximale Lösung $\varphi \colon (t^-, t^+) \to \mathbb{R}^n$ folgendes gelten kann.

(a) Ist $t^+ < \infty$ und $\varphi(t)$ unbeschränkt auf $[t_0, t^+)$, so gilt nicht notwendigerweise, dass $\|\varphi(t)\|$ für $t \to t^+$ uneigentlich konvergiert.

(b) Trotz $t^+ = \infty$ gilt $\lim_{t\to t^+} \operatorname{dist}((t, \varphi(t)), \partial D) = 0$.

3.11. **(Allgemeine Lösungen einer DGL)** Gegeben sei das AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

mit stetigem $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ und D offen. Ferner sei f Lipschitz-stetig bzgl. x. Sei $\varphi_{\max}(t, t_0, x_0)$ die eindeutige Lösung des AWPs auf dem maximalen Existenzintervall $I_{\max}(t_0, x_0)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $D_\varphi := \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2+n} \mid (t_0, x_0) \in D, t \in I_{\max}(t_0, x_0)\}$ offen ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon D_\varphi \to \mathbb{R}^n, \quad (t, t_0, x_0) \mapsto \varphi_{\max}(t, t_0, x_0)$$

stetig ist.

3.12. **(Qualitative Theorie in 1 Dimension).** Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(a) = f(b) = 0$ und $a < b$. Zeigen Sie: ist $x(t)$ eine Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

mit $x_0 \in [a, b]$, so gilt

(a) $x(t) \in [a, b]$ und $x(t)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert;

(b) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = c$ und $f(c) = 0$.

3.13. Sei $\phi(t, x_0)$ die Lösung von

$$\dot{x} = -x \sin^2 x, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Finden Sie $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t, x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Finden Sie erst die konstanten Lösungen ($\phi(t, x_0) \equiv K$) und dann zeichnen Sie die anderen Lösungen dieser Gleichung. Die explizite Lösung der Gleichung muss man nicht wissen!

3.14. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz–stetig und für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1^2 + x_2^2 = 1$ gelte

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Man bestimme das maximale Existenzintervall zum AWP

$$\dot{x} = f(x),\ x(t_0) = x_0,\ \text{wobei } \|x_0\|_2 < 1.$$

4 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

4.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für $p \in [1,\infty]$ Definiere p-Norm als

$$\|A\|_p := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p},$$

wobei $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ für $p \in [1,\infty)$ und $\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

Die Frobeniusnorm ist wie folgt definiert

$$\|A\|_F := \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Matrixnormen:

- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$
- $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

4.2. **(Lineare Systeme)** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Betrachten Sie ein lineares System

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Picard-Iteration

$$x_0(t) \equiv x_0,$$

$$x_i(t) := x_0 + \int_0^t Ax_{i-1}(s)ds, \quad i \geq 1,$$

dass die Lösung von (3) ist durch

$$x(t) = \lim_{i\to\infty} x_i(t) = e^{tA}x_0$$

gegeben, wobei $e^A := \sum_{i=0}^\infty \frac{A^i}{i!}$.

b) Beweisen Sie nun via direkte Differenzierung, dass

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

4.3. (a) Zeigen Sie: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $AB = BA$. Dann gilt $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie e^{tA} für

(i) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

(c) Kann für nicht vertauschbare Matrizen A und B gelten

$$e^A = e^B = e^{A+B} = I?$$

Hinweis: Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, G \in GL_n(\mathbb{C})$ gilt $e^{GAG^{-1}} = Ge^AG^{-1}$.

4.4. Finden Sie die Lösung der Gleichung $\dot{x} = x + \sin t$.

4.5. Lösen Sie die folgenden Systeme von Differentialgleichungen:

- $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$

4.6. Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ te^{-t} \end{pmatrix}$$

4.7. Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so dass $x(t) = (\sinh(t), e^t)$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist.

4.8. Gegeben sei der Operator $L_{AB} : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $L_{AB}(X) := AX + XB$. Zeigen Sie, dass für den Operator $\mathrm{e}^{tL_{AB}}$, $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathrm{e}^{tL_{AB}}(X) = \mathrm{e}^{tA}X\mathrm{e}^{tB}$.

4.9. Skizzieren Sie das Phasenportrait der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ für die Fälle

(a) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$

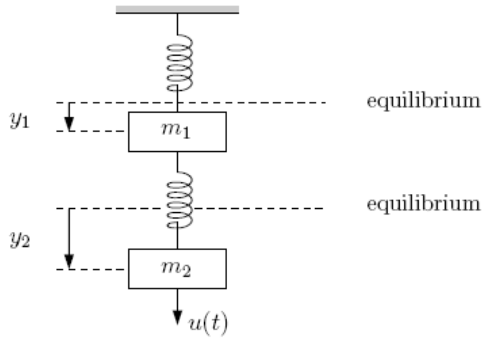
(b) $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2,$

(c) $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$

(d) Charakterisieren Sie für den Fall (c) alle Matrizen A, bei denen die zugehörigen Lösungen im bzw. gegen den Uhrzeigersinn laufen.

4.10. Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2, die an linearen gewichtslosen Federn mit den Federkonstanten k_1 bzw. k_2 hängen. Bei Vernachlässigung der Reibung gilt für die Auslenkungen $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ der beiden Massen von ihren Gleichgewichtslagen:

$$(*) \qquad \begin{cases} m_1\ddot{y}_1(t) &= -k_1y_1(t) - k_2y_1(t) + k_2y_2(t) \\ m_2\ddot{y}_2(t) &= k_2y_1(t) - k_2y_2(t) \end{cases}$$



a) Bestimmen Sie ein zu $(*)$ äquivalentes System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die komplexen und reellen Eigenschwingungen des Systems für $k_1 = k_2 = 1$ und $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

c) Zeichnen Sie die Graphen der Lösung $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ zum Anfangswert $y_1(0) = 1, \dot{y}_1(0) = 0, y_2(0) = -1, \dot{y}_2(0) = 0$ mit dem Rechner. Was passiert, wenn m_2 verzehnfacht wird? Was passiert, wenn m_1 verzehnfacht wird?

4.11. Im welchen Verhältnis stehen die Eigenwerte von A und e^A zueinander?
Hinweis: seien λ Eigenwert von A und x_λ ein entsprechender Eigenvektor. Berechnen Sie $e^A x_\lambda$.

4.12. Sei $\lambda < 0$ ein reeller Eigenwert von A. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} e^{At}x$ für alle x aus dem Eigenraum von λ.
Hinweis: benutzen Sie die Ergebnisse aus der vorigen Aufgabe.

4.13. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ ein A-invarianter Unterraum, d.h. $Ax \in V$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass die Lösung des AWP $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0 \ \in V$ für alle Zeit $t \in \mathbb{R}$ in V verbleibt.

4.14. Bestimmen Sie die reelle Jordannormalform J_A der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$$

und eine Matrix $T \in GL_7(\mathbb{R})$ mit $T^{-1}AT = J_A$.

4.15. Bestimmen Sie die reelle Jordannormalform J_A der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 & -8 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 2 & -6 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

und eine Matrix $T \in GL_6(\mathbb{R})$ mit $T^{-1}AT = J_A$.

4.16. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass es differenzierbare Funktionen $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k.$$

4.17. Berechnen Sie nach Definition e^{tA} folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwort: $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$

4.18. Berechnen Sie nach Definition e^{tA} folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Antwort: $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$

5 Lineare Gleichungen mit variablen Koeffizienten

5.1. Finden Sie die Lösung des Systems $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$.

Hinweis: Schreiben Sie dieses System erst als ein System zweier Differentialgleichungen um.

5.2. **(Reduktion der Ordnung)**. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\ddot{x} + (1 - t^2)x = 0 \tag{4}$$

wie folgt darstellt werden kann (die Reihenfolge ist wichtig!):

$$\Big(\frac{d}{dt} - t\Big)\Big(\frac{d}{dt} + t\Big)x = 0.$$

Lösen Sie nun diese Gleichung.

Hinweis: Lösen Sie erst

$$\Big(\frac{d}{dt} - t\Big)g(t) = 0.$$

5.3. **(Euler Gleichung).** Betrachten Sie die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{c_1}{t}\dot{x}(t) + \frac{c_0}{t^2}x(t) = 0.$$

Substituieren Sie $\tau := \ln t$, $y(\tau) := x(e^\tau)$. Leiten Sie eine DGL für y her!

5.4. **(Analysis für Matrizen).** Beweisen Sie folgende Regeln für $A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- $\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t)$
- $\frac{d}{dt}\Big(\int_{t_0}^t A(s)ds\Big) = A(t)$
- Sei $\det A(t) \neq 0$. Dann $\frac{d}{dt}(A^{-1}(t)) = -A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t)$.

5.5. Sei $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ für alle $t, s \geq 0$. Beweisen Sie:

- für $B(t) := \int_{t_0}^t A(s)ds$ gilt $A(t)B(t) = B(t)A(t)$ für alle $t \geq 0$
- $\frac{d}{dt}B^k(t) = A(t)nB^{k-1}(t)$.
- Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und alle $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von

  $$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

  lautet

  $$x(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}x(t_0).$$

5.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig.

(a) Zeigen Sie: Eine auf I stetige Matrix $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix des Systems $\dot{x} = -A(t)^\top x$, wenn für jede Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ des Systems $\dot{x} = A(t)x$ eine konstante reguläre Matrix C existiert, so dass

$$\Psi(t)^\top\Phi(t) = C \quad \text{für alle } t \in I.$$

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Übergangsmatrizen dieser beiden Systeme?

5.7. Gegeben sei eine Fundamentalmatrix $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ eines linearen Systems

$$\dot{x} = A(t)x,$$

und C sei eine reguläre konstante $N \times N$–Matrix.
Zeigen Sie, dass $C\Phi(t)$ genau dann eine Fundamentalmatrix dieser Differentialgleichung ist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$CA(t) = A(t)C \text{ für alle } t \in I.$$

5.8. **(Reduktion der Ordnung)** Sei $\phi_1(t)$ eine Lösung einer linearen Gleichung der Ordnung n mit variablen Koeffizienten. Dann kann man andere Lösungen in der Form $x(t) = c(t)\phi_1(t)$ suchen. Substitution von $x(t)$ in die Gleichung liefert uns die Differentialgleichung für $\dot{c}$. Die Ordnung dieser Gleichung ist $n - 1$. Benutzen Sie diese Methode um die allgemeinen Lösungen folgender Gleichungen zu finden:

- $\ddot{x} - 2t\dot{x} - 2x = 0$, $\phi_1(t) = e^{t^2}$ ($c(t)$ wird keine elementare Funktion!).
- $t^2\ddot{x} - 3t\dot{x} + 4x = 0$, $\phi_1(t) = t^2$.

5.9. Sie wissen, dass die Wronski Determinante $W(f_1, \ldots, f_n)$ gleich 0 ist, wenn $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig sind. Zeigen Sie, dass das Gegenteil nicht gilt. Dafür betrachten Sie linear unabhängige Funktionen $f_1(t) = t^2$ und $f_2(t) = t|t|$ und zeigen Sie, dass $W(f_1, f_2) \equiv 0$.

6 Stabilität

6.1. Gegeben sei das lineare System $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

und die Funktionen

$$V_1(x, y) = 6x^2 + y^2$$
$$V_2(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$
$$V_3(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

Welche der drei Funktionen ist eine Lyapunov-Funktion des Systems? Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage $x \equiv 0$ sagen?

6.2. Das Modell des harmonischen Oszillators lautet

$$\ddot{x} + a^2 x = 0$$

für $a > 0$.

a) Beweisen Sie, dass die Lösung $x \equiv 0$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

b) Beweisen Sie die analoge Aussage auch für die triviale Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + \Omega x = 0,$$

wobei $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix ist und $x \in \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Wenn man die Lyapunovsche Methode für die Lösung dieser Aufgabe anwenden möchtet, lohnt es sich erst das obere System als das System erster Ordnung mit dem Zustand (x, y) darzustellen, wobei $y = \dot{x}$.

c) **(Stabilisierung eines Oszillators)** Finden Sie eine Funktion $k = k(x, \dot{x})$, so dass die Lösung $x \equiv 0$ für

$$\ddot{x} + a^2 x = k(x, \dot{x})$$

asymptotisch stabil ist.

6.3. Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld für das gilt $\langle x, f(x) \rangle < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass das System $\dot{x} = f(x)$ eine asymptotisch stabile Ruhelage $x \equiv 0$ besitzt.

6.4. **(Krasovskii Methode)**

(a) Sei $f \colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Zeigen Sie, dass $V(x) := \|f(x)\|^2$ eine Lyaponuv-Funktion für $\dot{x} = f(x)$ bei $x = 0$ ist, falls $\langle x, (J_f(0) + J_f(0)^\top)x \rangle < 0$ für alle $x \in U$, wobei $J_f(0)$ die Jacobi-Matrix von f in 0 ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(0, 0)$ asymptotisch stabiler Fixpunkt des Systems

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

ist.