Halbgruppentheorie: Zusammenfassung

Andrii Mironchenko

Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau

Uni Passau
4 Februar 2016

Überblick

Sei X ein Banachraum.

Definition

$\{T(t),\ t \geq 0\} \subset L(X)$ heißt eine Halbgruppe $:\Leftrightarrow$

1. $T(0) = I$.
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.

Definition

Ein linearer Operator $L : x \mapsto \lim_{t \to +0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$, mit dem Definitionsbereich

$$D(L) = \{x \in X : \lim_{t \to +0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existiert}\}$$

heißt der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe T.

Gruppen und deren Erzeuger

Definition

$\{T(t),\ t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$ heißt eine Gruppe $:\Leftrightarrow$

1. $T(0) = I$.
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Definition

Ein linearer Operator L (nicht unbedingt beschränkt), der durch

$$Lx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$$

definiert ist, mit dem Definitionsbereich

$$D(L) = \{x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existiert}\}$$

heißt der infinitesimale Erzeuger der *Gruppe T*.

Überblick

Hahn-Banach Satz

Theorem (Hahn-Banach Satz)

Sei X ein normierter linearer Raum und U ein linearer Unterraum in X. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ ein stetiger linearer Funktional. Dann existiert ein $\tilde{f} \in X'$: $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ und $f(x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in U$.

Corollary

Sei X ein normierter linearer Raum und $x \in X \quad \Rightarrow \quad \exists f \in X'$: $f(x) = \|x\|_X$.

Corollary

Sei X ein normierter linearer Raum und U ein linearer Unterraum in X. Dann folgendes ist äquivalent:

(i) *U ist dicht in X*

(ii) *Aus $f \in X'$: $f(x) = 0$ für alle $x \in U$ folgt $f \equiv 0$ auf X.*

Banach-Steinhaus Satz

Theorem (Satz von Banach-Steinhaus)

Sei X ein Banachraum. Betrachte eine Familie der Operatoren $\{T_\alpha : \alpha \in S\} \subset L(X)$, wobei S ein beliebiger Indizenraum ist. Dann:

$$\sup_{\alpha\in S} \|T_\alpha x\|_X < \infty \text{ für alle } x \in X \quad \Rightarrow \quad \sup_{\alpha \in S} \|T_\alpha\| < \infty.$$

Corollary

Sei X ein Banachraum. Betrachte eine Familie der Operatoren $\{T_\alpha : \alpha \in S\} \subset L(X)$, wobei S ein Indizenraum ist.

$$\sup_{\alpha\in S} \|T_\alpha\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{\alpha\in S} \|T_\alpha x\|_X = \infty \text{ für ein gewisses } x \in X.$$

Abgeschlossene Operatoren

Sei X, Y Banachräume und $(A, D(A)) : X \to Y$ ein linearer Operator.

Definition

- A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_n\}_1^\infty \subset D(A)$ so dass $x_n \to x \in X$ und zugleich $Ax_n \to y \in Y$, gilt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.
- $G(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times Y$.

Proposition

A ist abgeschlossen $\quad \Leftrightarrow \quad \overline{G(A)}^{X \times Y} = G(A)$.

Proposition

$\exists A^{-1} \in L(Y, X) \quad \Rightarrow \quad$ *A ist abgeschlossen.*

Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen)

Sei X, Y Banachräume und sei $A : X \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator. Wenn $D(A) = X$, dann $A \in L(X)$.

Spektrum linearer Operatoren

Definition

Sei $(A, D(A)) : X \to X$ ein abgeschlossener Operator.

- Resolventenmenge: $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ ist bijektiv}\}$.
- Resolvente: $R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}$, for $\lambda \in \rho(A)$.
- Spektrum: $\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

Proposition

Sei $(A, D(A)) : X \to X$ ein abgeschlossener Operator.

- $\forall \lambda \in \rho(A) \quad \Rightarrow \quad B(\lambda, \frac{1}{\|R(\lambda, A)\|}) \subset \rho(A)$
- *$\sigma(A)$ ist abgeschlossen.*

Struktur des Spektrums

Definition

(i) Punktspektrum: $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ ist nicht injektiv}\}$.

(ii) Approximatives Punktspektrum:
$\sigma_{ap}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ hat keine beschränkte Inverse}\}$.

(iii) Residualspektrum:
$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda I - A) \text{ ist nicht dicht in } X\}$.

Proposition

Folgendes gilt

(i) $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x_\lambda \in D(A) \backslash \{0\} : \; Ax_\lambda = \lambda x_\lambda\}$.

(ii) $\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{\lambda_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}, \; \exists \{x_n\}_1^\infty \subset D(A) : \; \|x_n\|_X = 1 \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \|\lambda_n x_n - Ax_n\|_X \to 0, n \to \infty\}$.

(iii) $\sigma_{ap}(A) = \sigma_p(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda I - A) \text{ ist nicht abgeschlossen in } X\}$.

(iv) $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{ap}(A)$.

Spektrum selbstadjungierter Operatoren

Proposition

Sei X ein Hilbertraum und sei $(A, D(A)) : X \to X$ ein abgeschlossener dicht definierter Operator. Dann

(i) $\sigma_r(A) = \overline{\sigma_p(A^*)}$.

(ii) $\sigma(A) = \overline{\sigma(A^*)}$.

(iii) $(R_\lambda(A))^* = R_{\bar{\lambda}}(A^*)$.

Theorem

Sei A ein symmetrischer, abgeschlossener und dicht definierter linearer Operator. Dann:

- *Spektrum von A ist entweder $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ oder $\sigma(A) = \mathbb{C}$ oder $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\lambda \geq 0\}$ oder $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\lambda \leq 0\}$.*
- *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) $A = A^*$

  (ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

  (iii) $iI + A^*$ *und* $iI - A^*$ *sind injektiv*

  (iv) $Im(iI + A)$ *und* $Im(iI - A)$ *sind dicht.*

Überblick

Unterklassen der C_0-Halbgruppen

Definition

Eine Halbgruppe $\{T(t),\ t \geq 0\} \subset L(X)$ heißt:

- Gleichmäßig stetig, falls für alle $t \geq 0$ $\lim_{h \to 0} \|T(t+h) - T(t)\| = 0$.
- Stark stetig, falls für alle $x \in X$ die Funktion $t \mapsto T(t)x$ zu $C([0,\infty), X)$ gehört.
- Kontraktionshalbgruppe, falls $\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$.

Definition

Eine C_0-Gruppe $\{T(t),\ t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$ heißt:

- Unitär, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ $\|T(t)x\|_X = \|x\|_X$.

Gleichmäßig stetige Halbgruppen

Proposition

Für jedes $A \in L(X)$ *die Menge* $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *bildet eine gleichmäßig stetige Halbgruppe.*

Proposition

Set T *eine gleichmäßig stetige Halbgruppe. Dann gilt folgendes:*

(i) $\exists!\ A \in L(X)$ *so dass* $T(t) = e^{At}$ *für alle* $t \geq 0$.

(ii) *Operator* A *aus (i) ist ein infinitesimaler Erzeuger von* $T(\cdot)$.

(iii) $T(t)$ *ist differenzierbar für jedes* $t > 0$ *und*

$$\dot{T}(t) = AT(t) = T(t)A.$$

Eigenschaften der C_0-Halbgruppen

Sei $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ eine C_0-Halbgruppe.

Definition

Die Wachstumsschranke von T ist definiert durch $\omega_0(T) := \inf_{t>0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}$.

Proposition

T hat folgende Eigenschaften:

1. $\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} < +\infty$ *(möglicherweise $= -\infty$).*
2. $\forall \omega > \omega_0(T)$ *existiert ein* M_ω*:* $\forall t \geq 0$ *gilt*
$$\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}.$$
3. *Für alle* $x \in X \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x ds \to x$ *wenn* $t \to +0$.

Differenzierbarkeit der Trajektorien

Proposition

Sei T eine C_0-Halbgruppe mit dem Erzeuger A. Dann:

1. *Für alle $x \in D(A)$ und $t \geq 0$ folgt $T(t)x \in D(A)$ und*
$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax.$$
2. *Für $x \in D(A^n) := \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}$ und alle $t \geq 0$ gilt*
$$\frac{d^n}{dt^n}T(t)x = A^nT(t)x = T(t)A^nx.$$
3. $x \in X \wedge t > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t T(s)xds \in D(A)$ *und*
$$A\int_0^t T(s)xds = (T(t) - I)x.$$

Eigenschaften der infinitesimalen Erzeuger II

Proposition

Sei T eine C_0-Halbgruppe mit dem Erzeuger A. Dann:

1. *$D(A)$ ist dicht in X.*
2. *Für alle $x \in D(A)$ und alle $t > 0$ gilt*
$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds.$$
3. *A ist abgeschlossen.*
4. *Sei $T_1(\cdot)$ und $T_2(\cdot)$ die C_0-Halbgruppen mit demselben infinitesimalen Erzeuger A. Dann $T_1 \equiv T_2$.*

Resolvente = Laplacetransformation der Halbgruppe

Theorem (Notwendigkeit für Hille-Yoshida Satz)

Sei T eine C_0-Halbgruppe und sei $\omega > \omega_0(T)$, $M > 0$:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Dann $\{p \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} p > \omega\} \subset \rho(A)$ und für alle solche p und $\forall x \in X$

$$R_p(A)x = (pI - A)^{-1}x = \int_0^{\infty} e^{-pt}T(t)xdt,$$

$$\|(pI - A)^{-1}x\|_X \leq \frac{M}{\mathrm{Re} p - \omega}\|x\|_X.$$

Hille-Yoshida Satz: Kontraktionshalbgruppen

Theorem (Hille, Yoshida, 1948)

Sei $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator. A ist ein infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe $\Leftrightarrow$

(i) *A abgeschlossen ist*

(ii) $\overline{D(A)} = X$.

(iii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$ *und für alle $a > 0$ gilt*

$$\|(aI - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{a}.$$

Für und contra

+ Notwendige und hinreichende Bedingungen
+ Kann auf allgemeine Halbgruppen verallgemeinert werden
– Kenntnisse von Resolvente ist notwendig

Hille-Yoshida Satz: C_0-Halbgruppen

Theorem (Feller, Miyadera, Phillips, 1952)

Sei $A : D(A) \to X$ ein linearer abgeschlossener Operator mit $\overline{D(A)} = X$. A erzeugt eine C_0-Halbgruppe T, die die Abschätzung

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

erfüllt dann und nur dann, wenn für alle $s \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re} s > \omega$ folgt $s \in \rho(A)$ und die Resolvente $R_s(A)$ die folgende Ungleichung erfüllt

$$\|(R_s(A))^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re} p - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für und contra

+ Notwendige und hinreichende Bedingungen
+ Funktioniert in Banachraümen
– Kenntnisse von Resolvente ist notwendig

Dissipativität und Lumer-Phillips Satz

Sei X ein Hilbertraum.

Definition

Ein linearer Operator $(A, D(A)) : X \to X$ heißt dissipativ, wenn:

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \leq 0, \qquad \forall x \in D(A).$$

Theorem (Lumer-Phillips, 1961)

Sei X ein Hilbertraum. A erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe $\Leftrightarrow$

1. *A ist dissipativ.*
2. *$I - A$ ist surjektiv, d.h. $Im(I - A) = X$.*

Für und contra

+ Notwendige und hinreichende Bedingungen
+ Kann auch auf Banachräume verallgemeinert werden
+ Keine Kenntnisse von Resolvente ist notwendig

Charakterisierung via adjungierte Operatoren

Definition

Sei $A : X \to Y$ ein dicht definierter linearer Operator. Definiere

$$D(A^*) := \{y \in Y : \exists y^* \in X : \ \forall x \in D(A) \ \Rightarrow \ \langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, y^*\rangle_X\}.$$

Der Operator $A^* : Y \to X$, definiert durch $A^* y = y^*$, heißt der adjungierte Operator zu A.

Theorem

Sei:

- *X ein Hilbertraum*
- *$(A, D(A)) : X \to X$ ein linearer abgeschlossener Operator*
- $\overline{D(A)} = X$

$\Rightarrow$

A erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe $\Leftrightarrow$ A und A^* dissipativ sind.

Definition

Eine C_0-Gruppe T heißt unitär wenn $\|T(t)x\|_X = \|x\|_X$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Theorem (Stone, 1930)

Sei $(A, D(A)) : X \to X$ ein linearer Operator. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- *A erzeugt eine unitäre Gruppe*
- *A und $-A$ erzeugen Kontraktionshalbgruppen*
- $A = -A^*$

Überblick

Korrektgestelltheit der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}, \qquad (1)$$

Definition

$x : \mathbb{R}_+ \to X$ heißt eine klassische Lösung des AWPs (1) wenn $x \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$, $x(t) \in D(A)$ für alle $t > 0$ und x erfüllt (1).

Definition

Das AWP (1) heißt korrekt gestellt, wenn:

(i) $D(A)$ ist dicht in X.

(ii) $\forall x_0 \in D(A)$ existiert eindeutige klassische Lösung $\phi(\cdot, x_0)$ von (1).

(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \tau > 0\ \forall x_0 \in X\ \ \exists\, \delta > 0$: $\forall x_1 \in X$: $\|x_0 - x_1\|_X \le \delta \Rightarrow$

$$\sup_{t \in [0,\tau]} \|\phi(t, x_0) - \phi(t, x_1)\|_X \le \varepsilon$$

Korrektgestelltheit der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}, \qquad (1)$$

Definition

$x : \mathbb{R}_+ \to X$ heißt eine klassische Lösung des AWPs (1) wenn $x \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$, $x(t) \in D(A)$ für alle $t > 0$ und x erfüllt (1).

Satz

Sei A abgeschlossen.

$$(1) \text{ ist korrekt gestellt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ eine } C_0\text{-Halbgruppe erzeugt.}$$

In diesem Fall für jedes $x_0 \in D(A)$ ist die eindeutige klassische Lösung von (1) durch $x(t) = T(t)x_0$ gegeben.

Lineare inhomogene Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

Definition

$x : [0, \tau] \to X$ heißt eine klassische Lösung von (2) auf $[0, \tau]$, falls $x(t) \in D(A)$ für $t \in [0, \tau]$, $x \in C^1([0, \tau], X)$ und x erfüllt (2) für $t \in [0, \tau]$.

Lemma

Sei $f \in C([0, \tau], X)$ und sei $x \in C^1([0, \tau], X)$ eine klassische Lösung von (2) auf $[0, \tau]$. Dann $Ax(\cdot) \in C([0, \tau], X)$ und x hat die Form

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{3}$$

Lineare inhomogene Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

Satz

Sei $x_0 \in D(A)$ *und* $f \in C^1([0,\tau],X)$. *Dann die eindeutige klassische Lösung von* (2) *auf dem Zeitintervall* $[0,\tau]$ *ist durch* (3) *gegeben.*

Definition

Sei $f \in L_1([0,\tau],X)$. Die Funktion x, gegeben durch (3), heißt eine milde Lösung von (2) .

Theorem

Sei $x_0 \in X$ *und* $f \in L_1([0,\tau],X)$. *Dann ist die milde Lösung* (3) *von* (2) *stetig auf* $[0,\tau]$.

Sei Y ein Banachraum.

Definition

Die Abbildung $(A, D(A)) : Y \to Y$ heißt antilinear, wenn $A(a_1 y_1 + a_2 y_2) = \overline{a_1} A y_1 + \overline{a_2} A y_2$, $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ und $\forall y_1, y_2 \in D(A)$.

Definition

Die Abbildung $a : Y \times Y \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform, wenn:

- $x \mapsto a(x, y)$ ist linear $\forall y \in Y$
- $y \mapsto a(x, y)$ ist antilinear $\forall y \in Y$

Lax-Milgram Satz

Theorem (Lax-Milgram)

Sei Y ein Hilbertraum und sei $a : Y \times Y \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, so dass:

- *a ist beschränkt: $\exists c > 0$: $\forall x, y \in Y$*

$$|a(x,y)| \leq c\|x\|_Y\|y\|_Y,$$

- *a ist stark akkretiv: $\exists d > 0$: $\forall x \in Y$ gilt*

$$\mathrm{Re}\, a(x,x) \geq d\|x\|_X^2.$$

Dann: $\forall \psi \in Y^* \ \exists! z \in Y$: $\forall y \in Y$ gilt

$$\psi(y) = a(y,z).$$

Weiterhin, die Abbildung $\psi \mapsto z$ ist antilinear und beschränkt.

Laplace und Schrödinger Operator

- $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene nichtleere Menge.
- $X := L_2(U)$.
- $Y := H_0^1(U)$.

Betrachten wir $a : Y \times Y \to \mathbb{C}$, definiert $\forall u, v \in Y$ durch

$$a(x, y) := \int_U \nabla x(z) \cdot \overline{\nabla y(z)} dz.$$

$$D(\Delta_D) := \{x \in Y : \exists f \in X : \forall y \in Y \; a(x, y) = \langle f, y \rangle_X\}.$$

Definiere $\Delta_D : X \to X$ durch $\Delta_D x := -f$, wobei f kommt aus $D(\Delta_D)$.

Proposition

- Δ_D *erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe*
- Δ_D *ist selbstadjungiert*
- $i\Delta_D$ *(Schrödingeroperator) ist schiefadjungiert*
- $i\Delta_D$ *erzeugt unitäre Gruppe*

Wellenoperator

Nun sei $X := H_0^1(U) \times L_2(U)$. Betrachten wir den Operator

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_D & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Definitionsbereich

$$D(A) := D(\Delta_D) \times H_0^1(U).$$

Proposition

Es gilt:

- *A ist schiefadjungiert.*
- *A erzeugt eine unitäre Gruppe.*

Überblick

Definition

A strongly continuous semigroup T is called

1. Lyapunov stable $:=$ $\exists M > 0$: $\|T(t)\| \leq M \ \forall t \geq 0$.
2. Exponentially stable $:=$ $\exists M \geq 1$ and $\exists \omega < 0$: $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ for all $t \geq 0$.
3. Exponentially stable in $D(A)$ $:=$ $\exists M \geq 1$ and $\exists \omega < 0$: $\|T(t)x\|_X \leq Me^{\omega t}\|x\|_{D(A)}$ for all $t \geq 0$.
4. Uniformly stable $:=$ $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$.
5. Strongly stable $:=$ $\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\|_X = 0 \quad \forall x \in X$.
6. Weakly stable $:=$ $\lim_{t\to\infty} F(T(t)x) = 0 \quad \forall x \in X, \forall F \in X'$.

Theorem

Let $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Then the following statements are equivalent:

1. $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *is exponentially stable*
2. $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *is exponentially stable on* $D(A)$
3. $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *is uniformly stable*
4. $\{e^{At} : t \geq 0\}$ *is strongly stable*
5. $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < 0\}$.
6. *For any* $x \in \mathbb{C}^n$ *it follows that*

$$\int_0^\infty |e^{At}x|^2 dt < \infty.$$

7. *There exist* $P, Q > 0$ *(i.e.* P, Q *are positive definite) so that the Lyapunov equation holds:*

$$A^*P + PA = -Q.$$

$$
\begin{array}{lcc}
\text{(ES)} & \|T(t)\| \leq Me^{wt},\ w < 0,\ \forall t \geq 0 & \not\Leftarrow\ \Rightarrow \\
 & \Updownarrow & \\
\text{(US)} & \|T(t)\| \to 0 & \|T(t)x\|_X \leq Me^{wt}\|x\|_{D(A)} \\
 & \Downarrow\ \not\Uparrow & \not\swarrow \\
\text{(SS)} & \|T(t)x\|_X \to 0, \quad \forall x \in X & \\
 & \Downarrow\ \not\Uparrow & \\
\text{(WS)} & f(T(t)x) \to 0,\ \forall x \in X,\ \forall f \in X' & \\
 & \Downarrow\ \not\Uparrow & \\
\text{(LS)} & \|T(t)\| \leq M \text{ for some } M > 0 &
\end{array}
$$

Figure : Relations between stability notions for C_0-semigroups

Kriterien der exp. Stabilität

Criteria of exponential stability

1. On the level of semigroups
2. On the level of generators
3. On the level of resolvent

Let T be a strongly continuous semigroup over Banach space X.

Theorem

The following statements are equivalent:

(i) *T is exponentially stable*

(ii) *T is uniformly stable*

(iii) *There exists $t > 0$: $\|T(t)\| < 1$.*

(iv) $\omega_0(T) < 0$

(v) *(Datko) for any $x \in X$ holds*

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^2 dt < \infty.$$

Remark

Importance of Datko: trajectory-wise estimates (non-uniform property) implies exp. stability (uniform property).

Niveau der Erzeuger: Satz von Lyapunov

Theorem

Suppose that A is the infinitesimal generator of a C_0-semigroup $T(t)$ on a Hilbert space X. The following statements are equivalent:

(i) *T is exponentially stable*

(ii) *There exists a positive operator $P \in L(X)$, such that*

$$\langle Ax, Px\rangle + \langle Px, Ax\rangle = -\|x\|_X^2, \ \forall x \in D(A).$$

(iii) *There exists a positive operator $P \in L(X)$, such that*

$$\langle Ax, Px\rangle + \langle Px, Ax\rangle \leq -\|x\|_X^2, \ \forall x \in D(A).$$

Theorem

Let

- *X be a Hilbert space*
- *T be a strongly continuous semigroup over X with an infinitesimal generator A*

$\Rightarrow$

T is exponentially stable $\Leftrightarrow \sup_{z \in \mathbb{C}_+} \|R_z(A)\| < \infty$.

Remark

Gearhart's theorem is not true in Banach spaces.

Niveau der Resolventen: Gearhart's Satz 2

Gearhart's theorem is not true in Banach spaces
Reason: Plancherel's theorem does not hold in Banach spaces

Definition

For $f \in L_2(\mathbb{R}, X)$ define the Fourier transform of a function f as

$$(\mathcal{F}f)(\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} f(t)dt.$$

Theorem (Plancherel)

Let X be a Hilbert space. Then the Fourier transform is an isometry, i.e. for any $f \in L_2(\mathbb{R}_+, X)$ it holds that

$$\|\mathcal{F}f\|_{L_2(\mathbb{R},X)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R},X)}$$

Spektrale und Wachstumsschranke

Definition

Let T a C_0-semigroup generated by A.

1. spectral bound of A: $s(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$.
2. growth bound of T on $D(A)$: $\omega_1(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M > 0 : \|T(t)x\|_X \leq Me^{\omega t}\|x\|_{D(A)} \ \forall x \in D(A)\}$.
3. growth bound of T:
$\omega_0(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M > 0 : \|T(t)x\|_X \leq Me^{\omega t}\|x\|_X \ \forall x \in X\}$.

Theorem

For any strongly continuous semigroup T with an infinitesimal generator A it holds that

$$s(A) \leq \omega_1(T) \leq \omega_0(T).$$

Both inequalities in the above formula may be strict.

Spektrale und Wachstumsschranke 2

Definition

For any strongly continuous semigroup T with an infinitesimal generator A.

1. spectral bound of A: $s(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$.
2. growth bound of T on $D(A)$: $\omega_1(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M > 0 : \|T(t)x\|_X \leq Me^{\omega t}\|x\|_{D(A)} \; \forall x \in D(A)\}$.
3. growth bound of T:
$\omega_0(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M > 0 : \|T(t)x\|_X \leq Me^{\omega t}\|x\|_X \; \forall x \in X\}$.

Counterexamples

1. Greiner-Voigt-Wolff: $-1 = s(A) = \omega_1(T) < \omega_0(T) = 0$.
2. Zabczyk: $-1 = s(A) < \omega_1(T) = \omega_0(T) = 0$.
3. Combination of both: $s(A) < \omega_1(T) < \omega_0(T)$.

Clearly, there is a lot of other counterexamples.

Proposition

Let for the C_0-Semigroup $T(\cdot)$ with an infinitesimal generator A the spectral mapping theorem hold, i.e.

$$\sigma(T(t)) = e^{\sigma(A)t} \quad \forall t > 0.$$

Then $\omega_0(T) = s(A)$.

Fragestellung

$$\color{red}{\Sigma :} \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)),\ x(t) \in X, u(t) \in U,$$

- $x(t) \in X$ (Banach space).
- $u(t) \in U$ (linear normed space).
- $u \in C_b(\mathbb{R}_+, U)$.
- A generates a strongly stable semigroup over X.
- $f : X \times U \to X$ Lipschitz continuous on bounded subsets of X, uniformly w.r.t. the second argument, i.e.: if $\forall C > 0\ \exists L(C) > 0$, such that $\forall x, y : \|x\|_X \leq C,\ \|y\|_X \leq C$, $\forall v \in U$

$$\|f(y, v) - f(x, v)\|_X \leq L(C)\|y - x\|_X.$$

Existenz und Eindeutigkeit

$$\Sigma: \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)), \;\; x(t) \in X, u(t) \in U,$$

Theorem

Let f be Lipschitz on bounded subsets of X, uniformly w.r.t. the second argument and $f(x, \cdot)$ be continuous for all $x \in X$. Let also $U_c = C(\mathbb{R}_+, U)$.
Then for any $C > 0$, $x_0 \in X$ and $u \in U_c$: $\|x_0\|_X \leq C$ and $\|u(0)\|_U \leq C$ there exists a unique weak solution of Σ with initial condition x_0 and input u on $[0, t^*]$ for some $t^* = t^*(C) > 0$.

Stetige Abhängigkeit der Lösung von AW und Eingängen

$$\Sigma: \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)),\ x(t) \in X, u(t) \in U,$$

Definition

We say that Σ depends continuously on inputs and on initial states, if $\forall x \in X, \forall u \in U_c, \forall \tau > 0$ and $\forall \varepsilon > 0$ there exist $\delta = \delta(x, u, \tau, \varepsilon) > 0$, such that $\forall x' \in X : \|x - x'\|_X < \delta$ and $\forall u' \in U_c : \|u - u'\|_{U_c} < \delta$ it holds

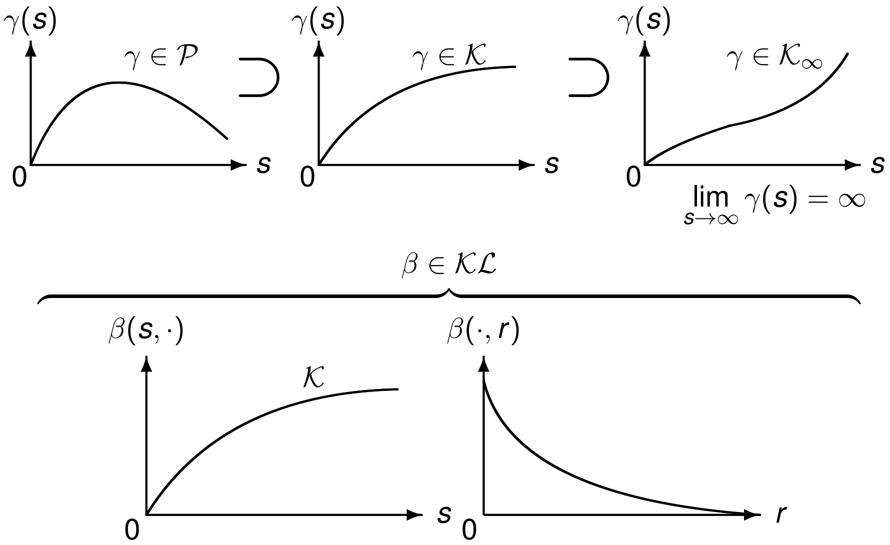
$$\|\phi(t, x, u) - \phi(t, x', u')\|_X < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Theorem

Let $f : X \times U \to X$ satisfy the following condition: there exist $q \in \mathcal{K}_\infty$: $\forall C > 0\ \exists L(C) > 0$, such that $\forall x_1, x_2 : \|x_1\|_X \leq C,\ \|x_2\|_X \leq C$, $\forall u_1, u_2 \in U:\ \|u_1\|_U \leq C,\ \|u_2\|_U \leq C$ it holds that

$$\|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)\|_X \leq L(C)\big(\|x_1 - x_2\|_X + q(\|u_1 - u_2\|_U)\big). \tag{3}$$

Comparison functions



Definition (Systems without inputs)

$$
\begin{aligned}
\text{0-LS} &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0\colon \|\phi_0\|_X < \delta \Rightarrow \|\phi(t,\phi_0,0)\|_X < \varepsilon. \\
\text{0-GS} &:\Leftrightarrow \quad \exists \sigma \in \mathcal{K}_\infty : \forall t \geq 0,\ \forall x \in X \\
&\qquad\qquad\qquad \|\phi(t,x,0)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) \\
\text{0-GATT} &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|\phi(t,x,0)\|_X = 0. \\
\text{0-LIM} &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \inf_{t\to\infty} \|\phi(t,x,0)\|_X = 0. \\
\text{0-UGATT} &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon, \delta > 0 \; \exists T = T(\varepsilon,\delta) : \\
&\qquad \forall t \geq T,\ \forall x \in X : \|x\|_X \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,0)\|_X \leq \varepsilon. \\
\text{0-GAS} &:\Leftrightarrow \quad \text{0-LS} + \text{0-GATT}. \\
\text{0-UGASs} &:\Leftrightarrow \quad \exists \beta \in \mathcal{KL}\colon \forall t \geq 0,\ \forall x \in X \\
&\qquad\qquad\qquad \|\phi(t,x,0)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t).
\end{aligned}
$$

Analogie mit den linearen Systemen

Proposition

$$\dot{x} = Ax.$$

Let A generate a C_0-semigroup T.

It holds that:

- Σ *is 0-GATT* $\Leftrightarrow$ T *is strongly stable*
- Σ *is 0-UGAS* $\Leftrightarrow$ T *is exponentially stable*
- Σ *is 0-LS* $\Leftrightarrow$ Σ *is 0-GS* $\Leftrightarrow$ T *is Lyapunov stable*
- Σ *is 0-GATT* $\Rightarrow$ Σ *is 0-LS* *(Banach-Steinhaus!).*
- Σ *is 0-GATT* $\Leftrightarrow$ Σ *is 0-GAS.*
- Σ *is 0-GAS* $\not\Rightarrow$ Σ *is 0-UGAS.*

What is new for nonlinear systems

- Σ is 0-GATT $\not\Rightarrow$ Σ is 0-LS
- Σ is 0-GAS $\not\Rightarrow$ Σ is 0-GS.

Lyapunov Funktionen

Definition

A continuous function $V : X \to \mathbb{R}_+$ is called a *(0-UGAS) Lyapunov function* for Σ, if there exist $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha \in \mathcal{P}$ such that

$$\psi_1(\|x\|_X) \leq V(x) \leq \psi_2(\|x\|_X), \quad \forall x \in X$$

and Lie derivative of V along the trajectories of the system Σ satisfies

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|_X)$$

for all $x \in X$, where the Lie derivative of V is defined by

$$\dot{V}(x) = \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{1}{t}(V(\phi(t, x, 0)) - V(x)).$$

Theorem

Σ is 0-UGAS $\quad \Leftrightarrow \quad$ $\exists$ *Lyapunov function for* Σ.

Charakterisierungen: Nichtlineare Systeme

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{0-UGATT} & \Leftrightarrow & \text{0-UGASs} & \Longleftrightarrow & \exists \text{ of 0-UGASs-LF} \\
(1) \cap & & & & (1)(2) \cap \\
\text{0-GAS+0-GS} & & \begin{matrix} \not\subset \\ \not\supset \end{matrix} & & \text{0-UAS+0-GATT} \\
(1)(2) \cap & & & & (1) \cap \\
\text{0-LIM + 0-LS} & \Leftrightarrow & \text{0-GAS} & \Longleftrightarrow & \text{0-GATT + 0-LS}
\end{array}
$$

Figure : Characterizations of 0-UGASs. Inclusions become equivalences for (1): ODE systems and (2): linear systems

Summary

Achievements

- Generation theorem of Hille-Yoshida
- Generation theorem of Lumer-Phillips
- Characterizations of exponential stability of C_0-semigroups
- Spectral and growth bounds of C_0-semigroups
- Characterizations of 0-UGAS of nonlinear systems.

Thank you for attention!